

Об описании явления диффузии в неоднородной среде с разрывным коэффициентом.

Л.В. Коробенко

Московский физико-технический институт (государственный университет)

1 Введение

Настоящая работа посвящена исследованию корректности задачи Коши для уравнения диффузии с одномерным координатным пространством с разрывными и вырождающимися коэффициентами, а также изучению предельно перехода при стремлении к нулю коэффициента диффузии на некотором подмножестве координатного пространства. Интерес к рассмотрению указанных вопросов возникает при исследовании явлений переноса в неоднородных средах, например, при описании динамики плотности носителей заряда в полупроводниках (см. [1], [2]). Проблема упорядочения операторов дифференцирования и умножения на разрывную функцию, изучаемая в настоящей работе, является также предметом исследования квантовой динамики носителей заряда в полупроводниках (см. [3]).

Одной из целей работы является установление связи между видом дифференциального оператора задачи и марковским диффузионным процессом, который соответствует явлению диффузии. Исследованию указанной взаимосвязи посвящены ряд работ и монографий [3], [4], [5]. Мы имеем цель исследовать указанную взаимосвязь для операторов, не содержащих в области определения элементы пространства непрерывных функций $C(R)$.

В работе дано обоснование выбора дифференциального оператора диффузии с разрывными коэффициентами, соответствующего условиям конечности скорости потока и концентрации. Установлены условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения с равномерно эллиптическим оператором и необращающимся в нуль коэффициентом диффузии, для уравнения диффузии с вырождением (обращением в нуль коэффициента диффузии на полупрямой) доказано, что необходимым и достаточным условием существования и единственности решения задачи Коши с произвольным начальным условием является отсутствие потока из области вырождения в область эллиптичности оператора. В случае выполнения указанного условия доказана сходимость последовательности решений регуляризованных задач к решению вырожденной задачи в пространстве $L_1(R)$ равномерно на каждом отрезке $[0, T]$.

В работе рассматривается марковский процесс, выбор которого продиктован требованиями минимальности отклонения от стандартного винеровского процесса в однородной среде, независимостью локальных свойств процесса в области однородности среды от свойств среды в дополнении к области однородности, а также требованиями регулярности процесса – конечности скоростей потока диффундирующих частиц и их концентрации. Требование конечности скорости потока диффундирующих частиц

определяет условия на предельные значения функции распределения частиц на границе областей однородности. А условие конечности значений функции распределения частиц определяет связь граничных значений производных функции распределения. Именно такие условия на граничные значения функций задают область определения оператора уравнения диффузии.

Полученному в соответствии с указанными требованиями в настоящей работе оператору уравнения диффузии с разрывными коэффициентами соответствует марковский процесс, переходные вероятности которого получены из переходных вероятностей стандартного винеровского процесса с помощью непрерывного кусочно дифференцируемого преобразования координатного пространства с условиями сохранения вероятности перехода из точки x координатного пространства в его борелевское подмножество Ω : вероятность перехода из точки x координатного пространства в его подмножество Ω совпадает с вероятностью перехода стандартного винеровского процесса из прообраза точки пространства в прообраз подмножества. Для невырожденного оператора диффузии в работе рассматривается модельное преобразование координатного пространства, являющееся сжатием с различными коэффициентами полупрямых $x < 0$ и $x > 0$. Кроме того, стандартный винеровский процесс, определяющий переходные вероятности, может быть возмущен процессом переноса с негладкими коэффициентами.

Краевые задачи с негладкими коэффициентами для дифференциального уравнения второго порядка параболического типа являются классическим объектом исследования. Теории таких задач посвящена монография [6]. Некоторые сложности с определением решения и исследованием корректности задачи указанного типа имеют место в случае вырождения коэффициентов и негладкости коэффициентов в области вырождения (см. [7], [8]). В настоящей работе исследована асимптотика последовательности решений уравнения диффузии с малым в области вырождения параметром при старшей производной и получены достаточные и необходимые условия сходимости последовательности решений задач с малым параметром. Тем самым, установлена устойчивость в пространстве $L_1(R)$ решения задачи Коши для уравнения диффузии с вырожденными коэффициентами по отношению к малым возмущениям коэффициентов оператора диффузии.

2 Постановка задачи

2.1 Задача Коши

В настоящей работе изучается диффузия в одномерном пространстве R^1 в предположении, что коэффициенты диффузии и сноса являются кусочно-постоянными функциями на R^1 с разрывом в точке $x = 0$:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in G_1 \triangleq R_-, \\ D, & x \in G_2 \triangleq R_+. \end{cases}$$

$$a(x) = \begin{cases} a, & x \in G_1, \\ 0, & x \in G_2. \end{cases}$$

Исследуется следующая задача Коши для функции концентрации $U(x, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = LU, \\ U(x, t)|_{t=0} = U_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

Начальная концентрация $U_0(x)$ принадлежит пространству $L_1(R)$. Сужения ее на области G_1 и G_2 обозначим $U_{01}(x)$ и $U_{02}(x)$ соответственно. Функция концентрации $U(x, t)$ также

принадлежит $L_1(R)$, а ее сужения на G_1 и G_2 , которые далее будем обозначать $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$, принадлежат пространствам Соболева $W_1^2(R_-)$ и $W_1^2(R_+)$ соответственно. По переменной t функция $U(x, t)$ непрерывно дифференцируема на R_+ .

Для полной постановки задачи Коши осталось определить дифференциальный оператор L . Действие оператора L на функцию концентрации определим следующим образом:

$$\begin{aligned} (LU)|_{R_-} &= -a \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ (LU)|_{R_+} &= D \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2)$$

а его область определения составляют функции из $W_1^2(R_\pm)$, удовлетворяющие на границе $x = 0$ условиям, обеспечивающим конечность скорости потока через границу и сохранение числа частиц. Подробный вывод этих условий будет проведен в следующем пункте.

Наряду с задачей (1) — вырожденной задачей — рассматривается следующая регуляризованная задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} = L_\varepsilon U_\varepsilon, \\ U_\varepsilon(x, t)|_{t=0} = U_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

с теми же начальными условиями и с оператором L_ε :

$$\begin{aligned} (L_\varepsilon U_\varepsilon)|_{R_-} &= \varepsilon \frac{\partial^2 U_{\varepsilon 1}}{\partial x^2} - a \frac{\partial U_{\varepsilon 1}}{\partial x} \\ (L_\varepsilon U_\varepsilon)|_{R_+} &= D \frac{\partial^2 U_{\varepsilon 2}}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Область определения оператора L_ε составляют функции из $W_1^2(R_-) \oplus W_1^2(R_+)$, обеспечивающие требования конечности скорости потока и сохранения числа частиц.

Нас будет интересовать вопрос о существовании решения задачи (1) и о сходимости последовательности решений регуляризованной задачи к решению вырожденной.

2.2 Граничные условия

Чтобы полностью сформулировать задачи Коши (1) и (3), рассмотрим вопрос о выборе граничных условий для функций из областей определения операторов L и L_ε . Как было отмечено выше, эти условия будем искать из следующих требований:

- 1) скорость потока частиц через границу $x = 0$ конечна
- 2) число частиц постоянно в любой момент времени $t \geq 0$

В работе [9] подробно рассмотрен вопрос о выборе оператора уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = LU = \begin{cases} D_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}, & x < 0, \\ D_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}, & x > 0, \end{cases} \quad (5)$$

область определения которого составляют функции, обеспечивающие условия 1)-2). Мы изучим вопрос о постановке граничных условий при $x = 0$ и выборе оператора для более общего случая уравнения со сносом:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - a_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}, & x \in G_1, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} - a_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}, & x \in G_2. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда граничные условия и оператор уравнения (1) получим, положив $D_1 = a_2 = 0$, а уравнения (3) — $D_1 = \varepsilon$, $a_2 = 0$.

Для того, чтобы сформулировать требования 1)-2) математически, рассмотрим процесс диффузии как марковский случайный процесс и сформулируем следующие предположения:

Предположение 1. Диффузия частиц с дискретным временем $t \in \{n\tau, n \in \mathbf{Z}_+\}$, где $\tau > 0$ - шаг по времени, является стационарным марковским процессом с вероятностью перехода из точки $x \in \mathbf{R}$ во множество $B \subset \mathbf{R}$ $P(x, \tau, B)$, причем, если переход из точки $x \in G_i$ за время τ происходит в область G_i , то вероятность такого перехода определяется формулой:

$$P(x, \tau, B) = \int_B \frac{1}{2\sqrt{\pi D_i \tau}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4D_i \tau}\right) dy + \int_B \frac{1}{2} \delta(x + a_i \tau - y) dy$$

Предположение 2. Скорость потока частиц из области G_1 в область G_2 в момент времени t определяется как:

$$J_2(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (N_{12}(t, \tau) - N_{21}(t, \tau)) \quad (7)$$

где N_{12} и N_{21} - число частиц перешедших из области G_1 в область G_2 и из G_2 в G_1 соответственно, за время τ , начиная с момента времени t .

Предположение 3. Процесс диффузии частиц на прямой с коэффициентом диффузии $D(x)$ происходит так, что скорость потока частиц конечна.

Предположение 4. Количество частиц $N(t)$ сохраняется

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0 \quad (8)$$

Используя данные предположения докажем следующую теорему, дающую граничные условия на функцию вероятности и ее производную при $x = 0$:

Теорема 1. Пусть диффузия частиц с коэффициентом $D(x)$ удовлетворяет предположениям (2) и (1). Тогда скорость потока частиц через границу $x = 0$ в момент времени t конечна тогда и только тогда, когда концентрация частиц в момент времени t удовлетворяет условию:

$$U_1(t, 0) \sqrt{D_1} = U_2(t, 0) \sqrt{D_2} \quad (9)$$

Условие (8) сохранения полного числа частиц

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} U(x, t) dx = 0$$

эквивалентно условию

$$D_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}(0, t) - a_1 U_1(0, t) = D_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}(0, t) - a_2 U_2(0, t) \quad (10)$$

Доказательство теоремы подробно проведено в работе [9].

Следствие 1. Зависимость концентрации частиц от времени и координаты при диффузии с коэффициентом $D(x)$ при выполнении предположений (1)-(4) определяется задачей Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= LU, t > 0, x \in \mathbf{R} \\ LU &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{D(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{D(x)} U \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} (a(x)U) \\ \text{где } D(x) &= \begin{cases} D_1, & x < 0, \\ D_2, & x > 0 \end{cases}, a(x) = \begin{cases} a_1, & x < 0, \\ a_2, & x > 0 \end{cases} \\ D(L) &= \{U(x) \in L_2(\mathbf{R}) \cap L_1(\mathbf{R}) : U(x)|_{\mathbf{R}_{\pm}} \in W_2^2(\mathbf{R}_{\pm}); \sqrt{D_1}U(-0) = \sqrt{D_2}U(+0), \\ &\quad D_1U'(-0) - a_1U(-0) = D_2U'(+0) - a_2U(+0)\} \\ U_{t=0} &= U_0(x, t) = \begin{cases} U_{10}(x), & x < 0, \\ U_{20}(x), & x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство следствия также проведено в работе [9].

3 Решение регуляризованной задачи

В предыдущем пункте была рассмотрена задача Коши для уравнения диффузии со сносом в случае разрывных коэффициентов D и a . Заметим, что регуляризованная задача Коши (3) эквивалентна рассмотренной. В данном случае $D_1 = \varepsilon$, $D_2 = D$, $a_1 = a$, $a_2 = 0$. Т.е. на каждой полуоси R_- и R_+ требуется решить уравнение диффузии (со сносом или без сноса) с постоянным коэффициентом, удовлетворяющую одному начальному и двум граничным условиям.

$$L_\varepsilon U = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{D_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{D_\varepsilon(x)} U - \frac{\partial}{\partial x} a(x)U \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D(L_\varepsilon) &= \{U(x) \in L_2(\mathbf{R}) \cap L_1(\mathbf{R}) : U(x)|_{\mathbf{R}_{\pm}} \in W_2^2(\mathbf{R}_{\pm}); \sqrt{\varepsilon}U(-0) = \sqrt{D}U(+0), \\ &\quad \varepsilon U'(-0) - aU(-0) = DU'(+0)\} \end{aligned}$$

$$D_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon, & x < 0; \\ D, & x > 0 \end{cases}$$

Теорема 2. Задача (3) имеет единственное решение при $a < 0$.

Доказательство

Докажем сначала, что эта задача имеет решение из класса L_2 , а точнее из $L_{2,\rho}$ — пространство с весом. Для этого согласно [10] необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие неравенства:

$$(L_\varepsilon U, U)_{L_{2,\rho}} \leq 0 \quad (13)$$

$$(L_\varepsilon^* V, V)_{L_{2,\rho}} \leq 0 \quad (14)$$

Где функции U и V принадлежат областям определения соответствующих операторов, а сопряженный оператор берется в пространстве $L_{2,\rho}$, т.е.

$$(V, L_\varepsilon U)_{L_{2,\rho}} = (L_\varepsilon^* V, U)_{L_{2,\rho}}$$

В качестве ρ удобно взять функцию

$$\sqrt{D_\varepsilon(x)} = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon}, & x < 0; \\ \sqrt{D}, & x > 0 \end{cases}$$

Как нетрудно показать, сопряженным к оператору L_ε в таком пространстве будет оператор:

$$L_\varepsilon^* V = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{D_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{D_\varepsilon(x)} V + \frac{a(x)}{\sqrt{D_\varepsilon(x)}} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{D_\varepsilon(x)} V \quad (15)$$

$$V \in D(L_\varepsilon^*) = \{V(x) \in L_2(\mathbf{R}) \cap L_1(\mathbf{R}) : U(x)|_{\mathbf{R}_\pm} \in W_2^2(\mathbf{R}_\pm); \sqrt{\varepsilon}V(-0) = \sqrt{D}V(+0), \quad (16) \\ \varepsilon V'(-0) = DV'(+0)\}$$

Начнем с доказательства неравенства (13):

$$\begin{aligned} (L_\varepsilon U, U)_{L_2, \sqrt{D_\varepsilon}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{D(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{D(x)} U \right) \right) U \sqrt{D(x)} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (a(x) U) U dx \\ &= \varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} U dx + D^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} U dx - a\sqrt{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial U}{\partial x} U dx = \\ &= -\varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx - D^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{2} U^2(-0) + \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{3}{2}} U(-0)U'(-0) - D^{\frac{3}{2}} U(+0)U'(+0) \end{aligned}$$

Первые два интегральных члена в полученном выражении положительны. Рассмотрим последние три члена. Используя граничные условия (9), (10) с заменой

$$D_1 = \varepsilon, \quad D_2 = D; \quad a_1 = a, \quad a_2 = 0$$

и выражая $U(+0)$, $U'(+0)$ через $U(-0)$, $U'(-0)$, получаем:

$$-\frac{a\sqrt{\varepsilon}}{2} U^2(-0) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} U(-0)U'(-0) - \varepsilon^{\frac{3}{2}} U(-0)U'(-0) + a\sqrt{\varepsilon} U^2(-0) = \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{2} U^2(-0)$$

Следовательно, при $a < 0$

$$(L_\varepsilon U, U)_{L_2, \sqrt{D_\varepsilon}} < 0 \quad (17)$$

Докажем теперь неравенство (14).

Используя выражение (15) для сопряженного оператора, получаем:

$$\begin{aligned} (L_\varepsilon^* V, V)_{L_2, \sqrt{D_\varepsilon}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{D(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{D(x)} V \right) \right) V \sqrt{D(x)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(x)}{\sqrt{D_\varepsilon(x)}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{D_\varepsilon(x)} V \right) V dx \\ &= \varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} V dx + D^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} V dx + a\sqrt{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial V}{\partial x} V dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx - D^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{2} V^2(-0) + \\
&\quad + \varepsilon^{\frac{3}{2}} V(-0)V'(-0) - D^{\frac{3}{2}} V(+0)V'(+0)
\end{aligned}$$

Последние два члена в этом выражении согласно (17) взаимоуничтожаются, откуда получаем

$$(L_\varepsilon^* V, V)_{L_{2, \sqrt{D\varepsilon}}} < 0 \quad \text{при } a < 0$$

Таким образом показано, что регуляризованная задача (3) имеет единственное решение в $L_{2, \rho}$. Покажем теперь, что это решение принадлежит пространству L_1 .

При доказательстве этого утверждения нам понадобится неотрицательность функции U — решения задачи (3). Чтобы привести задачу к более удобному виду совершим следующее преобразование:

$$U(x) = \begin{cases} \exp(\frac{a}{\varepsilon}x) \sqrt{\frac{D}{\varepsilon}} \tilde{U}(x\sqrt{\frac{D}{\varepsilon}}), & x < 0, \\ \tilde{U}(x), & x > 0 \end{cases} \quad (18)$$

Тогда для функции $\tilde{U}$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \begin{cases} D \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi^2} + a \sqrt{\frac{D}{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi}, & \xi < 0, \\ D \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi^2}, & \xi > 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\tilde{U}(-0, t) = \tilde{U}(+0, t) \quad (20)$$

$$\tilde{U}'(-0, t) = \tilde{U}'(+0, t) \quad (21)$$

Заметим, что согласно преобразованию (18) из неотрицательности функции $\tilde{U}$ будет следовать неотрицательность функции U .

Для того, чтобы показать неотрицательность функции $\tilde{U}$, заметим следующее. На любом конечном отрезке решение задачи (19) удовлетворяет принципу максимума (доказательство аналогично доказательству, проведенному, например, в [11]). Следовательно, на всей действительной оси функция достигает максимума (и минимума) либо в начальный момент, либо при $x \rightarrow \pm\infty$. В начальный момент функция неотрицательна, а на бесконечности стремится к нулю согласно лемме. Следовательно, функция $\tilde{U}$ не может принимать отрицательных значений.

Итак, нами показано существование единственного решения задачи (3) в классе $L_{2, \rho}$, а также его неотрицательность. Покажем теперь, что это решение принадлежит пространству L_1 . Интегрируя обе части уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{D_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{D_\varepsilon(x)} U \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} (a(x)U)$$

по x от $-\infty$ до $+\infty$, и используя тот факт, что

$$\int \frac{\partial U}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int U dx = \frac{d}{dt} \int |U| dx = \frac{d}{dt} \|U\|_{L_1}$$

т.к. $U \geq 0$ (доказано выше), получим:

$$\frac{d}{dt} \|U\|_{L_1} = \varepsilon U'(-0) - D U'(+0) - a U(-0) = 0$$

Т.е. $\|U\|_{L_1} = \|U_0\|_{L_1} < \infty$.

Теорема доказана.

Заметим также, что решение задачи $U(x, t)$ непрерывно зависит от начальных данных $U_0(x)$ в $L_1(R)$ в силу оценки $\|U(x, t)\|_{L_1} = \|U_0(x)\|_{L_1}$.

Таким образом регуляризованная задача корректна в классе начальных данных L_1 . Из этого в частности следует [10], что решение регуляризованной задачи задает полугруппу линейных непрерывных операторов:

$$\mathbf{V}_t^\varepsilon : L_1 \rightarrow L_1$$

Этот факт понадобится при исследовании сходимости в следующих параграфах.

4 Решение вырожденной задачи

В пункте 2.2 был найден оператор уравнения диффузии со сносом, удовлетворяющий требованиям конечности скорости потока через границу и сохранения полного числа частиц. Используя этот оператор, задачу (1) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = LU = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{D(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{D(x)} U \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} (a(x)U), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\text{где } D(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ D, & x > 0, \end{cases}, \quad a(x) = \begin{cases} a, & x < 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$D(L) = \{U(x) \in L_2(\mathbf{R}) \cap L_1(\mathbf{R}) : U(x)|_{\mathbf{R}_\pm} \in W_2^2(\mathbf{R}_\pm); U(+0) = 0, \\ -aU(-0) = DU'(+0)\}$$

$$U_{t=0} = U_0(x, t) = \begin{cases} U_{10}(x), & x < 0, \\ U_{20}(x), & x > 0. \end{cases} \quad (22)$$

Будем рассматривать задачу нахождения функции концентрации на каждой полуоси R_- и R_+ с учетом найденных граничных условий для случаев $a > 0$ и $a < 0$.

1. $a < 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial t} = -a \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ U_1(x, 0) = U_{10}(x) \\ U_1(0, t) = -\frac{D}{a} \frac{\partial U_2}{\partial x}(0, t) \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_2}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \\ U_2(x, 0) = U_{20}(x) \\ U_2(0, t) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Решением первой системы является функция

$$U_1(x, t) = \begin{cases} U_{10}(x - at), & x < at \\ f(x - at), & at < x < 0 \end{cases} \quad (25)$$

где $f(x)$ — функция, принадлежащая области определения оператора L , и удовлетворяющая условиям сшивки:

$$\begin{aligned} f(0) &= U_{10}(0) \\ f'(0) &= U'_{10}(0) \end{aligned} \quad (26)$$

и граничному условию:

$$f(-at) = -\frac{D}{a} \frac{\partial U_2}{\partial x}(0, t) \quad (27)$$

Решение системы (24) согласно [11] дается функцией:

$$U_2(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_0^{+\infty} U_{20}(\xi) \left[\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4Dt}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+x)^2}{4Dt}\right) \right] d\xi \quad (28)$$

Тогда из условия (27) следует:

$$\begin{aligned} f(-at) &= -\frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi Dt}} \int_0^{+\infty} U_{20}(\xi) \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4Dt}\right) d\xi \\ \Rightarrow f(y) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-a}{D}} \frac{1}{\sqrt{\pi y^{\frac{3}{2}}}} \int_0^{+\infty} U_{20}(\xi) \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4Dt}\right) d\xi = \\ &= 2\sqrt{\frac{D}{-a\pi}} \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} U_{20}\left(p \cdot 2\sqrt{\frac{Dy}{-a}}\right) \exp(-p^2) p dp \end{aligned} \quad (29)$$

Из полученного выражения следует, что $f(0)$ конечна тогда и только тогда, когда выполняется следующее требование на функцию концентрации: $U_{20}(0) = 0$. Аналогично, для того, чтобы была конечна $f'(0)$ необходимо, чтобы

$$U_{20}(0) = U'_{20}(0) = U''_{20}(0) = 0$$

Тогда $f(0) = f'(0)$, и из (26) следует, что $U_{10}(0) = U'_{10}(0) = 0$. Т.е. задача разрешима по крайней мере при начальных данных из пространства $C_{00}^\infty = \{\text{пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций с носителем, не содержащим нуля}\}$. Заметим также, что это пространство плотно в L_1 .

Таким образом, нами показано, что решение задачи (22) при $a < 0$ существует в классе начальных данных C_{00}^2 . Для корректности задачи необходимо еще показать, что:

$$U_0 \rightarrow 0 \Rightarrow U \rightarrow 0$$

Согласно (25), (29) сужение решения на левую полуось стремится к нулю при $U_{20} \rightarrow 0$. Из (28) следует стремление к нулю сужения на правую полуось. Следовательно, доказана следующая

Теорема 3. *задача Коши (22) корректна в классе начальных данных C_{00}^2 при $a < 0$.*

Рассмотрим случай

$$2.a > 0$$

Теорема 4. *Задача Коши (22) не имеет нетривиальных решений при $a > 0$.*

Доказательство

В этом случае из граничного условия

$$U_1(0, t) = -\frac{D}{a} \frac{\partial U_2}{\partial x}(0, t) \quad (30)$$

следует, что $\frac{\partial U_2}{\partial x}(0, t) \leq 0$. А т.к. $U_2(0, t) = 0$, $U_2(x, t) \geq 0 \forall x > 0$, то необходимо, чтобы

$$\frac{\partial U_2}{\partial x}(0, t) = 0$$

И с учетом (30),

$$U_1(0, t) = 0 \quad (31)$$

Решение системы (23) в случае $a > 0$, представляется в виде:

$$U_1(x, t) = U_{10}(x - at), \quad x < at$$

Учитывая (31), $U_{10}(-at) = 0$, откуда следует, что система (23) не имеет нетривиальных решений. Теорема доказана.

5 Сходимость решения регуляризованной задачи

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости решения регуляризованной задачи (3) к решению вырожденной в случае, когда последнее существует, т.е. при $a < 0$.

Для этого введем в рассмотрение следующую функцию

$$Z_\varepsilon = U + P_\varepsilon \in D(L_\varepsilon)$$

где U — решение задачи (1), а P_ε компенсирует различие граничных условий для L и L_ε . Для того, чтобы функция Z_ε принадлежала области определения оператора L_ε , необходимо, чтобы P_ε удовлетворяла следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} (U(-0, t) + P_\varepsilon(-0, t)) &= \sqrt{D} P_\varepsilon(+0, t) \\ \varepsilon (U'(-0, t) + P'_\varepsilon(-0, t)) &= D P'_\varepsilon(+0, t) \end{aligned} \quad (32)$$

(здесь ' означает дифференцирование по x)

Для простоты будем искать такую функцию $P_\varepsilon(x, t)$, для которой

$$P_\varepsilon(-0, t) = P'_\varepsilon(-0, t) = 0$$

С учетом этого требования граничные условия (32) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} U(-0, t) &= \sqrt{D} P_\varepsilon(+0, t) \\ \varepsilon U'(-0, t) &= D P'_\varepsilon(+0, t) \end{aligned}$$

В качестве такой функции можно взять, например:

$$P_\varepsilon = \begin{cases} U(-0, t) \exp(-x^2) \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} + \frac{\varepsilon}{D} U'(-0, t) x \exp(-x^2), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (33)$$

Введем в рассмотрение также следующие функции:

$$\begin{aligned} V_\varepsilon &= U_\varepsilon - U \\ W_\varepsilon &= U_\varepsilon - Z_\varepsilon = V_\varepsilon - P_\varepsilon \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда для функции W_ε справедливо следующее уравнение:

$$\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial t} = L_\varepsilon U_\varepsilon - LU - \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} = L_\varepsilon(U_\varepsilon - Z_\varepsilon) + (L_\varepsilon Z_\varepsilon - LU) - \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} = L_\varepsilon W_\varepsilon + f_\varepsilon(t) \quad (35)$$

Здесь введено обозначение

$$f_\varepsilon = (L_\varepsilon Z_\varepsilon - LU) - \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} \quad (36)$$

Докажем, что функция f_ε сходится к нулю в L_1 -норме.

Рассмотрим функцию

$$\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} = \begin{cases} \frac{\partial U(-0,t)}{\partial t} \exp(-x^2) \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} + \frac{\varepsilon}{D} \frac{\partial U'(-0,t)}{\partial t} x \exp(-x^2), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Покажем, что

$$\left\| \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_1(R)} = O(\sqrt{\varepsilon}) : \quad (37)$$

$$\left\| \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_1(R)} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} \left| \frac{\partial U(-0,t)}{\partial t} \right| \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx + \frac{\varepsilon}{D} \left| \frac{\partial U'(-0,t)}{\partial t} \right| \int_0^{+\infty} x \cdot \exp(-x^2) dx = O(\sqrt{\varepsilon})$$

Далее покажем, что сужения функции $L_\varepsilon Z_\varepsilon - LU$ на полуоси R_- и R_+ сходятся к нулю в L_1 -норме. Заметим, что $L_\varepsilon Z_\varepsilon \in L_1$ и $LU \in L_1$. Тогда

$$\begin{aligned} (L_\varepsilon Z_\varepsilon - LU) |_{R_\pm} &= (L_\varepsilon U + L_\varepsilon P_\varepsilon - LU) |_{R_\pm} = \\ &= ((L_\varepsilon - L)U + L_\varepsilon P_\varepsilon) |_{R_\pm} \\ L_\varepsilon P_\varepsilon |_{R_-} &= 0, \quad \text{т.к. } P_\varepsilon = 0 \text{ при } x < 0 \\ L_\varepsilon P_\varepsilon |_{R_+} &= D \frac{\partial^2 P_\varepsilon}{\partial^2 x} \\ (L_\varepsilon - L)U |_{R_-} &= \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} \\ (L_\varepsilon - L)U |_{R_+} &= 0, \quad \text{т.к. } L_\varepsilon |_{R_+} = L |_{R_+} \end{aligned} \quad (38)$$

То, что $\left\| \frac{\partial^2 P_\varepsilon}{\partial^2 x} \right\|_{L_1} = O(\sqrt{\varepsilon})$ показывается так же, как и для $\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t}$. $\left\| \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} \right\| < \infty$, т.к. $U(x) \in W_1^2(R_\pm)$

Таким образом из (36)-(38) следует, что

$$\|f_\varepsilon\|_{L_1} = O(\sqrt{\varepsilon})$$

Вернемся к уравнению (35). В пункте 3 показано, что задача Коши с оператором L_ε корректна при любых начальных данных $U_0 \in L_1$. Следовательно, решение уравнения (35) задает полугруппу линейных непрерывных операторов:

$$\mathbf{V}_t : L_1(R) \rightarrow L_1(R)$$

При этом оператор L_ε является изометрическим в L_1 -норме (см. доказательство теоремы 2). Следовательно, (см.[12]) можно представить решение уравнения (35) в следующем виде:

$$W_\varepsilon(x, t) = \mathbf{V}_t W_\varepsilon(x, 0) + \int_0^t \mathbf{V}_{t-s} f_\varepsilon(s) ds = \int_0^t \mathbf{V}_{t-s} f_\varepsilon(s) ds \quad (39)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|W_\varepsilon\|_{L_1} &= \left\| \int_0^t \mathbf{V}_{t-s} f_\varepsilon(s) ds \right\|_{L_1} \leq \int_0^t \|\mathbf{V}_{t-s}\|_{B(L_1)} \|f_\varepsilon(s)\|_{L_1} ds = \\ &= \int_0^t \|f_\varepsilon(s)\|_{L_1} ds \leq \max_{s \in [0, t]} \|f_\varepsilon(s)\|_{L_1} \cdot t = t \cdot O(\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned}$$

Окончательно, для функции $U_\varepsilon - U$ при $a < 0$ (т.е. когда U существует) получаем:

$$\|U_\varepsilon - U\|_{L_1} = \|W_\varepsilon + P_\varepsilon\|_{L_1} \leq \|W_\varepsilon\|_{L_1} + \|P_\varepsilon\|_{L_1} = O(\sqrt{\varepsilon}) \quad \forall t \quad (40)$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 5. *Решение регуляризованной задачи (1) сходится к решению вырожденной задачи (3) в L_1 -норме.*

Список литературы

- [1] Р.Ш. Малкович Математика диффузии в полупроводниках. С.-Петербург, Наука, 1999.
- [2] А.А. Смирнов Молекулярно-кинетическая теория металлов. М.: Наука, 1966
- [3] И.И. Гихман, А.В. Скороход Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977
- [4] В. Феллер Введение в теорию вероятностей и её приложения / 2 издание , Мир, 1964.
- [5] М.И. Фрейдлин, А.Д. Вентцель Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
- [6] О.А. Ладыженская Краевые задачи уравнений математической физики. М.: Наука, 1973.
- [7] В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
- [8] В.Ж. Сакбаев О функционалах на решениях задачи Коши для уравнения Шредингера с вырождением на полупрямой // Журн. выч. мат. и матем. физ., 2004, т. 44, № 9 с. 1654–1673
- [9] Л.В. Коробенко, В.Ж. Сакбаев Решение уравнения диффузии на прямой с разрывным коэффициентом // Московский физико-технический институт (государственный университет), 2007
- [10] Н.Я. Виленкин и др. Функциональный анализ // Наука, М., 1964
- [11] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский Уравнения математической физики // Наука, М., 1977
- [12] Т. Като Теория возмущений линейных операторов // Мир, М., 1972